# Управление образования города Нур-Султан

**Учреждение « Колледж Евразийского гуманитарного института»**



**СБОРНИК САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ**

**ПО ДИСЦИПЛИНЕ « ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»**

**Нур-Султан**

**Разработчик:**

**Дощанова Г.К..,** преподаватель математики высшей квалификационной категории

**Технический редактор:**

**Мусина А.З.,** методист колледжа

**Шаикова Г.К.,** руководитель ШПО

**Аннотация:**

Сборник самостоятельных работ по дисциплине «Высшая математика» включают требования по структуре составления, критерии оценивания и перечень примерных видов самостоятельных работ для студентов специальности «Информационные системы».

Издание предназначено для преподавателей колледжа ЕАГИ.

Издание предназначено для студентов очной и заочной формы обучения специальности «Информационные системы».

**Рассмотренои одобрено на заседании методического совета УВО «Евразийского гуманитарного института»**

**Протокол № 3 от 24.02.2022 г.**

**Пояснительная записка**

Методические указания предназначены для проведения практических работ по дисциплине "Высшая математика" (для студентов второго и третьего курса специальности «Информационные системы» ).

Содержание самостоятельных работ позволяет освоить:

1. практические приемы вычисления с помощью методов дифференциального и интегрального исчисления;
2. практические приемы вычисления пределов;
3. практические приемы нахождения частных производных функций многих переменных;
4. виды и методы решения простейших дифференциальных уравнений;
5. методы и способы решения систем уравнений;
6. различные способы задания прямой;
7. свойства кривых второго порядка;
8. теорию комплексных чисел;
9. исследование ряда на сходимость;
10. численные методы.

В методических указаниях к выполнению самостоятельных работ содержится инструкция с четким алгоритмом хода работы. Каждая самостоятельных работа включает краткий теоретический материал, примеры задач и набор заданий.

Методические указания могут быть использованы для контрольных работы студентов.

**Ход выполнения практической работы**

Самостоятельных работы необходимо выполнять в специальных тетрадях с указанием номера, темы, целей работы.

*Ход работы:*

1. Познакомиться с теоретическим материалом
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры)
3. В тетрадях выполнить самостоятельную работу или решить номера, которые указаны в работе.
4. Сдать преподавателю тетради.

**Критерии оценивания практических работ**

Оценка «5» ставится, если верно и рационально решено 90%-100% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет, неискажающий сути решения.

Оценка «4» ставится при безошибочном решении 80% предлагаемых заданий.

Оценка «3» ставится, если выполнено 70% предлагаемых заданий, допустим 1 недочет.

Оценка «2» - решено мене 70% предлагаемых заданий.

**Перечень самостоятельных работ**

|  |  |
| --- | --- |
| **№ работы** | **Тема** |
| 1 | Уравнения прямой на плоскости |
| 2 | Кривые второго порядка |
| 3 | Правила дифференцирования |
| 4 | Приложения производной к исследованию функций |
| 5 | Вычисление пределов различными способами |
| 6 | Методы интегрирования |
| 7 | Площадь криволинейной трапеции |
| 8 | Частные производные функций многих переменных |
| 9 | Геометрическая интерпретация комплексного числа |
| 10 | Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме: умножение и степень |
| 11 | Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме: деление, корень |
| 12 | Показательная форма комплексного числа |
| 13 | Дифференциальные уравнения с разделяющими переменными |
| 14 | Дифференциальные уравнения первого порядка |
| 15 | Дифференциальные уравнения второго порядка |
| 16 | Признаки сравнения |
| 17 | Признаки Коши и Даламбера |
| 18 | Признак Лейбница |
| 19 | Численное интегрирование. Способ прямоугольников |
| 20 | Численное интегрирование. Способ трапеций |

**Самостоятельная работа №1**

**“ Уравнения прямой на плоскости.”**

**Цель работы:**

1. Познакомиться с заданиями прямой на плоскости.

2. На конкретных примерах научиться составлять различные уравнения прямой.

**Содержание работы:**

1. Аx + Вy + С = 0 – общее уравнение прямой

    а) a = 0, b ≠ 0. Уравнение определяет прямую, параллельную оси абсцисс и пересекающую ось ординат в точке с координатой http://mathematics.ru/courses/planimetry/content/javagifs/63167102347675-3.gif

    б) b = 0, a ≠ 0. Уравнение определяет прямую, параллельную оси ординат и пересекающую ось абсцисс в точке с координатой http://mathematics.ru/courses/planimetry/content/javagifs/63167102347738-4.gif

    в) c = 0. Уравнение определяет прямую, проходящую через начало координат.

**2**. \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} - уравнение прямой, проходящей через 2 точки (х1, у1); (х2, у2).

**3**. x = x_0 + a_xt,\;\;\;y = y_0 + a_yt,- параметрические уравнения прямой

**4**. - уравнение прямой, проходящей через точку А(х0, у0) инаправляющий вектор



**5**. - уравнение прямой в отрезках

**6**. А(x-х0) + В(y-у0) = 0 – уравнение прямой, проходящей через точку А(х0, у0) инормальный

вектор 

**Задания для самостоятельной работы:**

П.Т.Апанасов «Сборник задач по математике», см. стр. 27-31,; №77, 84, 86, 93, 94, 97, 99, 101, 103, 106, 108, 110, 112, 114, 115.

**Самостоятельная работа №2**

**“ Кривые второго порядка”**

**Цель работы:**

1. Познакомиться с уравнениями кривых второго порядка.

2. Научиться строить кривые второго порядка.

**Содержание работы:**

*Определение*  Кривой второго порядка называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению второго порядка $\displaystyle ax^2+bxy+cy^2+dx+fy+g=0,$

|  |  |
| --- | --- |
| *Определение*Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки, называемой центром окружности.  $\displaystyle (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$ | *Пример 1*   Нарисуйте кривую $ {x^2+y^2-2x+6y+6=0}$.  **Решение.** Выделив полные квадраты, получим  $\displaystyle (x-1)^2+(y+3)^2=2^2.$  Итак, центр окружности -- $ M_0(1;-3)$, радиус равен 2  http://elib.ispu.ru/library/math/sem1/pyartli1/imagesbig/pimage302.png |
| *Определение*Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек той же плоскости, назывемых фокусами эллипса, есть величина постоянная.  $\displaystyle \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ $ b^2=a^2-c^2$  *Определение* Точки пересечения эллипса с его осями симметрии называются вершинами эллипса, центр симметрии - центром эллипса, отрезок между двумя вершинами, содержащий фокусы, называется большой осью эллипса, половина его длины -- большой полуосью эллипса. Отрезок между вершинами на оси симметрии, не содержащей фокусов, называется малой осью эллипса, половина его длины -- малой полуосью. Величина $ {\varepsilon}=\dfrac ca$называется эксцентриситетом эллипса. | *Пример 2*   Постройте кривую $ 4x^2+9y^2=36$. Найдите фокусы и эксцентриситет.  **Решение.** Разделим обе части уравнения на 36. Получаем уравнение  $\displaystyle \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1.$ $ {a=3}$, $ {b=2}$.    http://elib.ispu.ru/library/math/sem1/pyartli1/imagesbig/pimage306.png  $ {c^2=a^2-b^2=9-4=5}$, $ {c=\sqrt 5}$. Фокусы -- $ F_1(-\sqrt5;0)$, $ F_2(\sqrt5;0)$ эксцентриситет -- $ {{\varepsilon} =\dfrac{\sqrt5}3}.$ |
| *Определение*   Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек той же плоскости, называемых фокусами гиперболы, есть величина постоянная.  $\displaystyle \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$ $\displaystyle b=\sqrt{c^2-a^2}.$  $ y=\frac bax$, $ {y=-\frac bax}$- асимптоты гиперболы  *Определение*   Точки пересечения гиперболы, заданной каноническим уравнением, с осью $ Ox$называются вершинами гиперболы, отрезок между ними называется действительной осью гиперболы. Отрезок оси ординат между точками (0, *-в*) и (0,*в*) называется мнимой осью. Числа $ a$и $ b$называются соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы. Начало координат называется ее центром. Величина  называется эксцентриситетом | *Пример 3*   Постройте гиперболу , найдите ее фокусы и эксцентриситет.  **Решение.** Разделим обе части уравнения на 4. $\displaystyle \frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{2^2}=1,$ $ a=1$, $ b=2$.  Проводим асимптоты и строим гиперболу.  http://elib.ispu.ru/library/math/sem1/pyartli1/imagesbig/pimage312.png  $ c=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt5$. Тогда фокусы -- $ F_1(-\sqrt5;0)$, $ F_2(\sqrt5;0)$, $ {{\varepsilon}=\frac ca=\sqrt5}$. |
| **Определение 12.7**   Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых расстояние до фиксированной точки этой плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до фиксированной прямой, лежащей в той же плоскости и называемой директрисой параболы.  $\displaystyle y^2=2px.$  директриса имеет уравнение $ {x=-\frac p2}$ | *Пример 4*   Постройте параболу . Найдите ее фокус и директрису.  **Решение.** Уравнение является каноническим уравнением параболы, 2р=3, р=1,5. Для построения найдем несколько точек параболы.. Возьмем точки $ \left(\frac13;1\right)$, $ \left(\frac43;2\right)$, $ (3;3)$.  http://elib.ispu.ru/library/math/sem1/pyartli1/imagesbig/pimage316.png  Фокус *F* лежит на оси *Ох* на расстоянии от вершины, то есть имеет координаты (0,75;0). Директриса имеет уравнение , то есть х=-0,75. |

**Задания для самостоятельной работы:**

П.Т.Апанасов «Сборник задач по математике», см. стр. 33-36; №131, 133, 134, 137, 141, 142, 143, 144, 147, 150, 151, 156, 158.

**Самостоятельная работа №3**

**“Правила дифференцирования”**

**Цель работы:**

Проверить умения нахождения производной функции.

**Содержание работы:**

***Таблица производных основных элементарных функций:***

|  |  |
| --- | --- |
| 1.  2.  3.  4.  5**.**  6.  7.  8.  9.  10.  11. | 12.  13.  14.  15.  16.  17.  18.  19.  20. |

**Задания для самостоятельной работы:**

1.П.Т.Апанасов «Сборник задач по математике», см. стр. 121-122; №12, 13, 14, 17, 18, 22, 25, 36, 43, 44, 51, 57, 72, 80, 81, 100, 114, 120, 141.

**2. Самостоятельная работа**

**Вариант 1.**

*Найдите производную*

**1.** f’ (*х*) = (*х* + 2); **2.** f’ (*х*) =; **3.** f’ (*х*) =  +  – *х*2 – 3*х*; **4.** f’ (*х*) = (х - 1) (х + 2).

**5**. f(x) = sin(2x2 – 3x + 1); **6.** f(x) = cos3(2x – 1); **7.** f(x) = 

**Вариант 2.**

*Найдите производную*

**1.** f’ (*х*) = (*х* + 1); **2.** f’ (*х*) =; **3.** f’ (*х*) =  +  *х*3–  – 2*х*; **4.** f’ (*х*) = (х + 3) (х - 2).

**5.** f(x) = cos(3x2 – 4x + 2); **6.** f(x) = sin3(2 - 3x); **7.** f(x) = .

**Самостоятельная работа №4**

**“Приложение производной к исследованию функций ”**

**Цель работы:**

Используя схему исследования функции научиться строить графики функций.

**Содержание работы:**

*Общая схема исследования функции и построение её графика.*

1. Найдите область определения функции.

2. Исследуйте функцию на четность или нечетность.

3. Найдите промежутки знакопостоянства.

4. Найдите промежутки монотонности функции, её экстремумы.

5. Найдите промежутки выпуклости графика функции, её точки

перегиба.

6. Найдите точки пересечения графика функции с осями координат.

7. Постройте график функции, используя полученные результаты

исследования.

**Пример**

Построить график функции: 

1. D(y) = R
2. Функция не является четной и нечетной.
3. у = 0 при х = 0. Два промежутка знакопостоянства и 

для ; для 

1. Найдем производную данной функции:



при х = -1. Эта точка делит область определения функции на два промежутка 

- **+**

-1

Исследуемая функция на промежутке убывает, а на промежутке возрастает. Точка х = -1 – точка минимума 

1. Найдем вторую производную данной функции:



при х = -2

- **+**

  -2  

для , для 

следовательно, график следовательно, график

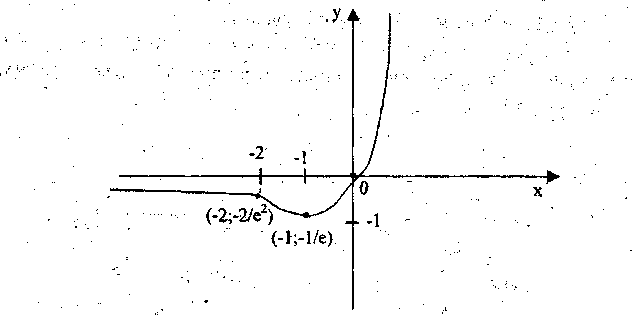
функции на этом функции на данном

интервале выпуклый интервале выпуклый

вверх. вниз.

х = -2 - точка перегиба, 

6. По полученным данным строим график



**Задания для самостоятельной работы:**

|  |  |
| --- | --- |
| ***Вариант 1.***  Построить график функции:  **1.** y = ; **2.** y = x(x – 1)3. | ***Вариант 2.***  Построить график функции:  **1.** y = ; **2.** y = (x –1)2 · (x + 2). |

**Самостоятельная работа №5**

**“ Вычисление пределов различными способами ”**

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться вычислять пределы различными способами.

**Содержание работы:**

*Типы неопределенностей и методы их раскрытия*

Часто при вычислении пределов какой-либо функции, непосредственное применение теорем о пределах не приводит к желаемой цели. Так, например, нельзя применять теорему о пределе дроби, если ее знаменатель стремится к нулю. Поэтому часто прежде, чем применять эти теоремы, необходимо тождественно преобразовать функцию, предел которой мы ищем. Рассмотрим некоторые приемы раскрытия неопределенностей.

**I. Неопределенность вида **

*Пример 1.* Вычислить предел 

Решение: При подстановке вместо переменной *х* числа 5 видим, что получается неопределенность вида . Для ее раскрытия нужно разложить знаменатель на множители: х2 *-25* = (х-5)\*(х+5), получили общий множитель (х-5),на который можно сократить дробь. Задан­ный предел примет вид: . Подставив х=5,получим результат: === 

*Пример 2.* Вычислить предел 

Решение: При подстановке вместо переменной *х* числа 3 видим, что получается неопределенность вида . Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель *х-3.* В результате получим новый предел, знаменатель ко­торого при подстановке вместо переменной х числа 3 не равен нулю. Этот предел легко вы­числяется по теоремам. Таким образом, неопределенность будет раскрыта.



*Пример 3.* Вычислить предел 

Решение: При подстановке вместо переменной *х* числа 0 видим, что получается неопределенность вида . Для ее раскрытия воспользуемся первым замечательным пределом  и его следствием . После чего предел легко вычисляется по теоремам. Таким образом, неопределенность будет раскрыта.



**I I. Неопределенность вида **

*Пример 4.* Вычислить предел 

Решение: При подстановке вместо переменной *х* бесконечности () видим, что получается неопределенность вида . Для ее раскрытия нужно числитель и знаменатель разделить на наивысшую степень, в данном случае на *х.* Получим:

==, т.к. величины являются бесконечно малыми и их пределы равны 0.

**Задания для самостоятельной работы:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант** | **II вариант** | **III вариант** |
| **«3»** | | |
| а) | а) | а) |
| б) | б) | б) |
| в) | в) | в) |
| г) | г) | г) |
| **«4»** | | |
| а) | а) | а) |
| б) | б) | б) |
| в) | в) | в) |
| г) | г) | г) |
| **«5»** | | |
| а) | а) | а) |
| б) | б) | б) |
| в) | в) | в) |
| г) | г) | г) |

**Самостоятельная работа №6**

**“Методы интегрирования”**

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться находить неопределенный интеграл различными способами

**Содержание работы:**

*Таблица интегралов*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1.  2.  3.  4.  5.  6. | 7.  8.  9.  10.  11.  12. | 13.  14.  15.  16. |

***Методы интегрирования***

1. Непосредственное интегрирование

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

*Пример 1:* Вычислите 

Решение: Для вычисления интеграла сначала воспользуемся 2 и 3 свойствами неопре­деленного интеграла, а затем применим 1 и 4 табличные интегралы:



*Пример 2:* Вычислите 

Решение: Для вычисления интеграла сначала каждый член числителя почленно разделим на знаменатель, затем воспользуемся 2 и 3 свойствами неопре­деленного интеграла и применим 1 и 3 табличные интегралы



2. Метод замены переменной (метод подстановки)

Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегри­рования, позволяющих вомногих случаях упростить вычисление интеграла. Суть этого ме­тода состоит в том, что путем введения новой переменной интегрирования заданный инте­грал сводится к новому интегралу, который легко вычисляется непосредственным интегри­рованием.

*Пример 3:* Вычислите 

Решение: Введем новую переменную *t = 3x-4*, тогда , откуда . Подставим новую переменную в интеграл (вместо выражения *3х-4* подставим *t*, вместо подставим ). 

Далее нужно вернуться к первоначальной переменной. Для этого сделаем обратную замену (вместо *t* подставим выражение *3х-4*), получим окончательный ответ.



**Задания для самостоятельной работы:**

1. П.Т.Апанасов «Сборник задач по математике», см. стр. 141-146, №21, 22, 24, 29, 30, 50, 55, 60, 74, 90, 131.
2. **Самостоятельная работа**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Вариант 1** | | **Вариант 2** | |
| **«3»** | **«5»** | **«3»** | **«5»** |
| а) | а) | а) | а) |
| б) | б) | б) | б) |
| в) | в) | в) | в) |
| г) | г) | г) | г) |

**Самостоятельная работа №7**

**“Нахождение площади криволинейной трапеции”**

**Цель работы:**

1. Познакомить с понятием криволинейной трапеции

2. На конкретных примерах научиться находить площадь криволинейной трапеции

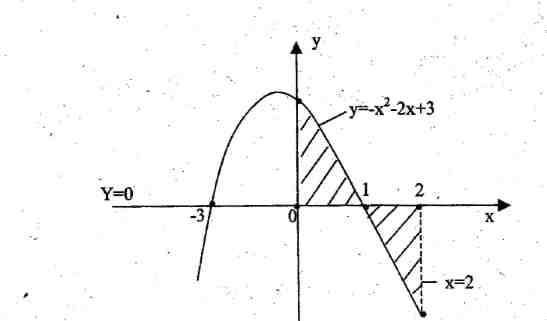
**Содержание работы:**

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой *у=f(х)*, двумя прямыми *х=а* и *х=b* и осью абсцисс, вычисляется с помощью определенного интеграла по формулам:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

*Пример 4:* Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями , осями координат и прямой *х=2*.

Решение: Построим данные линии



Найдем точки пересечения графика функции с осью Ох: , ,  





**Задания для самостоятельной работы:**

1. П.Т.Апанасов «Сборник задач по математике», см. стр. 155, №206, 216
2. Самостоятельная работа

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант** | **II вариант** | **III вариант** |
| ***Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями*** | | |
| у = х2+4х  у = х+4 | у = х2,  у = 2-х2 | у = 4х - х2,  у = 4-х |

**Самостоятельная работа №8**

**“** **Частные производные функций многих переменных ”**

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться находить частные производные функции многих переменных

**Содержание работы:**

*Частной производной* функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется производная, взятая по этой переменной при условии, что все остальные переменные остаются постоянными. Для функции двух переменных z = f(x, y) *частной производной по переменной* *x* называется производная этой функции по *x* при постоянном *y*. Обозначается частная производная по x следующим образом: http://www.mathelp.spb.ru/book1/chast_proiz.files/image008.gifhttp://www.mathelp.spb.ru/book1/chast_proiz.files/image010.gif.

Аналогично *частной производной функции* z = f(x, y) *по аргументу* *y* называется производная этой функции по *y* при постоянном *x*. Обозначения:

http://www.mathelp.spb.ru/book1/chast_proiz.files/image012.gif

*Частными производными второго порядка функции* z = f(x, y) называются частные производные от ее частных производных первого порядка. Если первая производная была взята, например, по аргументу *x*, то вторые производные обозначаются символами http://www.mathelp.spb.ru/book1/chast_proiz.files/image014.gif  

*Пример*. Найти частные производные z = y4 - 2xy2 + x2 + 2y + y2.

*Решение.* http://www.mathelp.spb.ru/book1/chast_proiz.files/image022.gif= - 2y2 + 2x, http://www.mathelp.spb.ru/book1/chast_proiz.files/image024.gif= 4y3 - 4xy +2 +2y, ,  , 

**Задания для практической работы:**

1. П.Т.Апанасов «Сборник задач по математике», см. стр. 259, №25, 26, 28, 29,30
2. Практическая работа

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***Вариант I*** | ***Вариант II*** | ***Вариант III*** |
| *1.Найдите частные производные первого и второго порядка* | | |
|  |  |  |
| *2. Найдите значения частных производных в точке (1;1)* | | |
|  |  |  |
| *4\*. Найдите область определения функции* | | |
|  |  |  |

**Самостоятельная работа 9**

**“ Геометрическая интерпретация комплексного числа”**

**Цель работы:**

1. Познакомиться с геометрической интерпретацией комплексного числа.
2. Научиться находить модуль и аргумент комплексного числа .

**Содержание работы:**

Рассмотрим на плоскости декартову прямоугольную систему координат *хОу*. Каждому комплексному числу *z=a+bi* можно сопоставить точку с координатами *(a,b)*, и наоборот, каждой точке с координатами *(c,d)* можно сопоставить комплексное число *w=c+di*.

Таким образом, между точками плоскости и множеством комплексных чисел устанавливается взаимно однозначное соответствие. Поэтому комплексные числа можно изображать как точки плоскости. Плоскость, на которой изображают комплексные числа, обычно называют комплексной плоскостью.

|  |  |
| --- | --- |
| http://elib.ispu.ru/library/math/sem1/pyartli1/imagesbig/pimage1701.png | *Пример 1:*   Изобразим на комплексной плоскости числа: *z1=2+i, z2=3i, z3=-3+2i, z4=-1-i, z5=-3* |
| http://elib.ispu.ru/library/math/sem1/pyartli1/imagesbig/pimage1702.png | Однако чаще комплексные числа изображают в виде вектора с началом в точке *О*, а именно, комплексное число *z=a+bi* изображается радиус-вектором точки с координатами *(a,b)*. В этом случае изображение комплексных чисел из предыдущего примера будет таким: |
| http://elib.ispu.ru/library/math/sem1/pyartli1/imagesbig/pimage1703.png | Отметим, что изображением суммы двух комплексных чисел $ z$, $ w$является вектор, равный сумме векторов, изображающих числа $ z$и $ w$. Иными словами, при сложении комплексных чисел складываются и векторы, их изображающие. |

Пусть комплексное число *z=a+bi* изображается радиус-вектором. Тогда длина этого вектора называется модулем числа *z* и обозначается . Из рисунка очевидно, что 

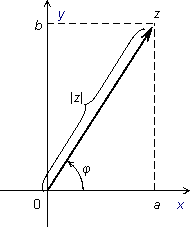


Рис. Модуль и аргумент

Угол, образованный радиус-вектором числа *z* с осью *Ox*, называется аргументом числа *z* и обозначается *arg z*. Аргумент числа определяется не однозначно, а с точностью до числа, кратного . Однако, обычно аргумент указывают в диапазоне от 0 до или в диапазоне от до . Кроме того у числа $ {z=0}$ аргумент не определен.

На рис. *arg z* равен углу . Из того же рисунка очевидно, что 

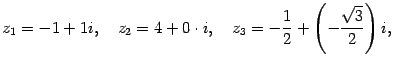
С помощью этого соотношения можно находить аргумент комплексного числа:

$\displaystyle \arg z=\mathop{\rm arctg}\nolimits \frac ba$ или $\displaystyle \quad \arg z=\pi+\mathop{\rm arctg}\nolimits \frac ba,$

причем первая формула действует, если изображение числа *z* находится в первой или четвертой четверти, а вторая, если -- во второй или третьей. Если *a=0*, то комплексное число изображается вектором на оси *Оу* и его аргумент равен  или .

*Пример 2:*   Найдите модуль и аргумент комплексных чисел: *z1=-1+i, z2=4, , z4=5i, z5=-2-3i*

*Решение***.** Запишем числа со строгим указанием действительной и мнимой части:

 $\displaystyle z_4=0+5i,\quad z_5=-2+(-3)i.$

Тогда находим:

$\displaystyle \vert z_1\vert=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt2,\quad \arg z_1=\pi+\mathop{\rm arctg}\nolimits \frac1{-1}=\pi-\frac{\pi}4=\frac{3\pi}4;$ $\displaystyle \vert z_2\vert=\sqrt{4^2+0^2}=4,\quad \arg z_2=\mathop{\rm arctg}\nolimits \frac04=0;$\begin{multline*}
\vert z_3\vert=\sqrt{\left(-\frac12\right)^2+\left(-\frac{\sq...
...left(-\frac12\right)\right)=\\
=\pi+\frac{\pi}3=\frac{4\pi}3;
\end{multline*}

$\displaystyle \vert z_4\vert=\sqrt{0^2+5^2}=5,\quad \arg z_4=\frac{\pi}2;$

$\displaystyle \vert z_5\vert=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{13},\quad
\arg z_5=\pi+\mathop{\rm arctg}\nolimits \frac{-3}{-2}=\pi+\mathop{\rm arctg}\nolimits 1.5.$

В последнем случае можно вычислить с помощью калькулятора $ {\mathop{\rm arctg}\nolimits 1.5}$и записать $ {\arg z_5\approx 4.1244}$.

**Задания для самостоятельной работы:**

1. П.Т.Апанасов «Сборник задач по математике», см. стр.

**2.Самостоятельная работа по теме: «Геометрическое изображение комплексных чисел»**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **«3»** | | **«4», «5»** | |
| **1 вариант** | **2 вариант** | **1 вариант** | **2 вариант** |
| **1. Найдите модуль комплексного числа** | | | |
|  |  |  |  |
| **2. Изобразите геометрически сумму двух комплексных чисел** | | **2. Что представляет геометрически множество всех комплексных чисел** | |
| ; | ; |  |  |
| **3. Найдите аргумент комплексного числа** | | | |
|  |  |  |  |

**Самостоятельная работа №10**

**“ Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме: умножение и степень ”**

**Цель работы:**

1. На конкретных примерах научиться умножать и возводить в степень комплексные числа .

2. Познакомиться с формулой Муавра.

**Содержание работы:**

|  |  |
| --- | --- |
| $\displaystyle z=r(\cos{\varphi}+i\sin{\varphi}).$ | **Тригонометрическая форма комплексного числа**  *(указание числа по двум его характеристикам: модулю и аргументу)* |
| ***z=a+bi*** | **Алгебраическая форма комплексного числа** |

*Замечание*    При записи числа в тригонометрической форме НЕЛЬЗЯ вычислять значения  и , иначе мы потеряем явное указание аргумента *z* и снова вернемся к алгебраической форме. Кроме того, если угол получился отрицательным, то знак «-» НЕЛЬЗЯ выносить за знак синуса и НЕЛЬЗЯ убирать его под знаком косинуса.

|  |  |
| --- | --- |
| $\displaystyle z_1z_2=r_1r_2\big(\cos({\varphi}_1+{\varphi}_2)+i\sin({\varphi}_1+{\varphi}_2)\big).$  $\displaystyle \vert z_1z_2\vert=r_1r_2=\vert z_1\vert\vert z_2\vert,$  $\displaystyle \arg(z_1z_2)={\varphi}_1+{\varphi}_2=\arg z_1+\arg z_2,$ | **При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.** |
| $\displaystyle z^n=r^n(\cos n{\varphi}+i\sin n{\varphi}).$ | ***Формула Муавра*** |

*Пример 1***:**   Вычислите , если  и 

*Решение:*  

*Пример 2:*   Вычислите , если *z=1-i*.

*Решение***.** Находим тригонометрическую форму числа $ z$: $\displaystyle r=\vert z\vert=\sqrt2,\quad {\varphi}=\arg z=-\frac{\pi}4,\quad z...
...rt2\left(\cos
\left(-\frac{\pi}4\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}4\right)\right).$

По формуле Муавра

$\displaystyle z^6=(\sqrt2)^6\left(\cos\left(-\frac{6\pi}4\right)+i\sin\left(-
...
...8\left(\cos\left(-\frac{3\pi}2\right)+i\sin\left(-
\frac{3\pi}2\right)\right).$Переходим к алгебраической форме, вычисляя косинус и синус: $ {z^6=8i}$.

**Задания для самостоятельной работы:**

1.П.Т.Апанасов «Сборник задач по математике», см. стр.

Самостоятельная работа

***Действия с комплексными числами, записанными в тригонометрической форме***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| «3» | | «4», «5» | |
| 1 вариант | 2 вариант | 1 вариант | 2 вариант |
| 1. Найдите , | | | |
|  |  |  |  |

**Самостоятельная работа №11**

**“ Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме: деление, корень ”**

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться умножать и возводить в степень комплексные числа .

**Содержание работы:**

|  |  |
| --- | --- |
| $\displaystyle \left\vert\frac{z_1}{z_2}\right\vert=\frac{\vert z_1\vert}{\vert z_2\vert},\quad \arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2,$ | **При делении комплексных чисел их модули делятся один на другой, а аргументы вычитаются** |
| $\displaystyle z=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\psi+2\pi k}n+i\sin\frac{\psi+2\pi k}n  \right),\quad k=0,1,\ldots,n-1.$ | ***Корень из ненулевого комплексного числа однозначно определить нельзя. Он всегда имеет столько значений, какова его степень.*** |

*Пример 1***:**   Вычислите , если  и 

*Решение:*  

*Пример 2:*   Найдите корни уравнения $ {z^4=-1}$.

*Решение***.** Запишем число *-1* в тригонометрической форме: $\displaystyle -1=1\cdot (\cos\pi+i\sin\pi),$

то есть $ {\rho=1}$, $ {\psi=\pi}$. Тогда $\displaystyle z=\sqrt[4]1\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}4=i\sin\frac{\pi+2\pi k}4\right),
k=0,1,2,3.$

При $ {k=0}$получим: 

При $ {k=1}$получим: 

При $ {k=2}$получим: 

При $ {k=3}$получим: 

**Задания для самостоятельной работы:**

1. П.Т.Апанасов «Сборник задач по математике», см. стр.
2. Практическая работа

***Действия с комплексными числами, записанными в тригонометрической форме***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| «3» | | «4», «5» | |
| 1 вариант | 2 вариант | 1 вариант | 2 вариант |
| 1. Найдите , | | | |
|  |  |  |  |

**Самостоятельная работа №12**

**“ Показательная форма комплексного числа ”**

**Цель работы:**

1. Познакомиться с показательной формой комплексного числа
2. На конкретных примерах научиться представлять комплексные числа в показательной форме

**Содержание работы:**

|  |  |
| --- | --- |
| $\displaystyle z=re^{i{\varphi}}.$ | **Показательная форма комплексного числа** |
| $\displaystyle e^{i{\varphi}}=\cos{\varphi}+i\sin{\varphi},$ | **Формула Эйлера** |

*Пример 1:*   Пусть $ z=-1+i$. Напишите показательную форму числа $ z$.

*Решение***.** Находим модуль и аргумент числа:

$\displaystyle r=\vert z\vert=\sqrt2,\quad {\varphi}=\arg z=\frac{3\pi}4.$

Следовательно, показательная форма комплексного числа такова:

$\displaystyle z=\sqrt2e^{\frac{3\pi}4i}.$

*Пример 2:*   Комплексное число записано в показательной форме

$\displaystyle z=2e^{\frac{\pi}6i}.$

Найдите его алгебраическую форму.

$\displaystyle z=2\left(\cos\frac{\pi}6+i\sin\frac{\pi}6\right)=2\left(\frac{\sqrt3}2+
i\frac12\right)=\sqrt3+i.$

Итак, алгебраическая форма числа: $ {z=\sqrt3+i}$.

**Задания для самостоятельной работы:**

1. П.Т.Апанасов «Сборник задач по математике», см. стр.
2. Самостоятельная работа

**Представьте комплексное число в показательной форме:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **«3»** | | | | **«4», «5»** | | | |
| **1**. | **2.** | **3.** | **4**. | **1**. | **2**. | **3**. | **4**. |
| **5.** | **6.** | **7.** | **8.** | **5**. | **6.** | **7**. | **8.** |
| **9**. | | **10.** | | **9**. | | **10**. | |

**Самостоятельная работа №13**

**“ Дифференциальные уравнения с разделяющими переменными ”**

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться решать дифференциальные уравнения с разделяющими переменными

**Содержание работы:**

*Определение.* Дифференциальное уравнение называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

 или 

Пример1. Найти решение дифференциального уравнения  при условии у(2) = 1.

- общее решение, при у(2) = 1 получаем  Итого:  или  - частное решение;

Пример2. Решить уравнение 

**Задания для самостоятельной работы:**

1.П.Т.Апанасов «Сборник задач по математике», см. стр. 219-220, №1, 7, 9, 11, 17

2.Практическая работа

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант:** | **I I вариант:** | **I I I вариант:** |
| *1. Проверить, является ли решением данного дифференциального уравнения указанная функция:* | | |
|  |  |  |
| *2. Решите уравнение с разделяющими переменными* | | |
|  |  |  |
| *3. Найдите решение, удовлетворяющее начальному условию* | | |
| у(0)=2 | у(0)=1 |  |

**Самостоятельная работа №14**

**“ Дифференциальные уравнения первого порядка ”**

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка

**Содержание работы:**

*Определение.* Дифференциальное уравнение вида называется **однородным**, если его правая часть f(x, y) есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида  является однородным, если функции *P(x, y)* и *Q(x, y)* – однородные функции одинакового измерения.

*Определение.* Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:



при этом, если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

*P(x)* и *Q(x)-* функции непрерывные на некотором промежутке a < x < b.

*Пример.* Решить уравнение .

Введем вспомогательную функцию *u.* .

Отметим, что введенная нами функция *u* всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее .

Подставляем в исходное уравнение: 

Разделяем переменные: 

Интегрируя, получаем: 

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции у, получаем общее решение: 

**Задания для самостоятельной работы:**

П.Т.Апанасов «Сборник задач по математике», см. стр. 220-222, №24, 27, 35, 47

**Самостоятельная работа №15**

**“ Дифференциальные уравнения второго порядка ”**

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться решать дифференциальные уравнения второго порядка

**Содержание работы:**

Пример. Решить уравнение 

Характеристическое уравнение: 



Общее решение: 

Пример. Решить уравнение 

Характеристическое уравнение: 





Общее решение: 

**Задания для самостоятельной работы:**

1.П.Т.Апанасов «Сборник задач по математике», см. стр. 222-223, №52, 53, 54, 59, 61, 65

2. Самостоятельная работа

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I вариант:** | **I I вариант:** | **I I I вариант:** |
| *Решите уравнения 2го порядка* | | |
| **а)**  **б)** | **а)**  **б)** | **а)**  **б)** |

**Самостоятельная работа №16**

**“ Признаки сравнения ”**

**Цель работы:**

1. Познакомиться с признаками сравнения для определения сходимости ряда.
2. На конкретных примерах научиться применять признаки сравнения для определения сходимости ряда.

**Содержание работы:**

Рассмотрим два числовых ряда с неотрицательными членами   и  , . Если при всех n, начиная с некоторого номера, , то из сходимости ряда следует сходимость ряда. Наоборот, из расходимости ряда следует расходимость ряда.

2. Если для таких же двух рядов   image29.gif (1309 bytes), то оба ряда или сходятся или расходятся одновременно.

Обобщенный гармонический ряд  image30.gif (1035 bytes), который сходится приimage31.gif (918 bytes) и расходится при image32.gif (924 bytes), или геометрический ряд image33.gif (1045 bytes), который сходится при image34.gif (928 bytes)и расходится при image35.gif (927 bytes).

*Пример 1:* Исследовать на сходимость ряд 

*Решение*. Исследуем ряд по первой теореме сравнения. Поскольку  при , а ряд  сходится как ряд бесконечно убывающей геометрической прогрессии, то исходный ряд тоже сходится.

*Пример 2:* Исследовать на сходимость ряд .

*Решение*. Сравним данный ряд с гармоническим рядом :

. В силу второй теоремы сравнения он расходится (т.к.расходится гармонический ряд).

**Задания для самостоятельной работы:**

1. П.Т.Апанасов «Сборник задач по математике», см. стр.
2. Практическая работа

**Исследовать ряд на сходимость:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1**. | **2.** | **3.** | **4**. | **5**. | **6**. | **7**. | **8**. |

**Самостоятельная работа №17**

**“ Признаки Коши и Даламбера ”**

**Цель работы:**

1. Познакомиться с признаками Коши и Даламбера.
2. На конкретных примерах научиться применять данные признаки для исследования ряда на сходимость.

**Содержание работы:**

Признак Даламбера. (Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик)

*Если для ряда  с положительными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство  то ряд  сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется условие то ряд  расходится.*

Признак Коши (радикальный признак)

*Если для ряда с неотрицательными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство ,*

*то ряд сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется неравенство*

* то ряд расходится.*

*Пример1:* Определить сходимость ряда .

 Вывод: ряд сходится.

*Пример2:* Исследовать на сходимость ряд .

Решение. По признаку Даламбера ряд сходится, так как

.

**Задания для самостоятельной работы**

1. П.Т.Апанасов «Сборник задач по математике», см. стр.240-245, №6, 7, 9, 24, 25, 30, 32

2. Самостоятельная работа

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1 вариант** | **2 вариант** | **3 вариант** | **4 вариант** | **5 вариант** | **6 вариант** |
| **1. Найти общий член числового ряда** | | | | | |
|  |  |  |  |  |  |
| **2. Исследовать ряд на сходимость** | | | | | |
|  |  |  |  |  |  |

**Самостоятельная работа № 18**

**“ Признак Лейбница ”**

**Цель работы:**

1. Познакомиться с признаком Лейбница.
2. На конкретных примерах научиться применять данный признак для исследования ряда на сходимость.

**Содержание работы:**

Рассмотрим знакочередующийся ряд

 , (1)

где . Ряд (1) сходится, если  и . Ряд вида (1), удовлетворяющий указанным условиям, называется рядом лейбницевского типа или лейбницевским рядом. Остаток лейбницевского ряда имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине: .

*Пример 1:* Исследовать на сходимость ряд .

Решение. По признаку Лейбница данный ряд сходится, так как  и . Но ряд из абсолютных величин  расходится по первой теореме сравнения, ибо , а ряд  является расходящимся, что нетрудно показать путём сравнения его с гармоническим рядом. Итак, данный ряд сходится.

**Задания для самостоятельной работы**

П.Т.Апанасов «Сборник задач по математике», см. стр.240-245

**Самостоятельная работа №19**

**“ Численное интегрирование. Способ прямоугольников ”**

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться приближенно вычислять определенный интеграл с помощью способа прямоугольников.

**Содержание работы:**

Пусть требуется определить значение интеграла функции на отрезке \left[ {a},{b} \right]. Этот отрезок делится

точками x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_nна n\,\!равных отрезков длиной \Delta {x} = \frac{b-a}{n}. Обозначим через y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_nзначение функции f\left(x\right)в точках x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n.Далее составляем суммы y_0 \,\Delta {x} + y_1 \,\Delta {x} + \ldots + y_{n-1} \,\Delta {x} + y_n \,\Delta {x}. Каждая из сумм — интегральная сумма для f\left(x\right)на \left[ {a},{b} \right]и поэтому приближённо выражает интеграл.

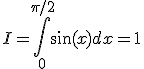
\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}).

Если заданная функция — положительная и возрастающая, то эта формула выражает площадь ступенчатой фигуры, составленной из «входящих» прямоугольников, а формула:

\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)

выражает площадь ступенчатой фигуры, состоящей из «выходящих» прямоугольников. Чем меньше длина отрезков, на которые делится отрезок \left[ {a},{b} \right], тем точнее значение, вычисляемое по этой формуле, искомого интеграла.

*Пример:* Вычислим по формуле прямоугольников при n=2 интеграл



В данном случае

P_2=\frac{\pi}{4}(\sin(\frac{\pi}{8})+\sin(\frac{3\pi}{8}))=1.026172

**Задания для самостоятельной работы**

П.Т.Апанасов «Сборник задач по математике», см. стр.240-245, №

**Самостоятельная работа №20**

**“ Численное интегрирование. Способ трапеций ”**

**Цель работы:**

На конкретных примерах научиться приближенно вычислять определенный интеграл с помощью способа трапеций.

**Содержание работы:**

Если функцию на каждом из частичных отрезков [аппроксимировать](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BF%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%BA%D1%81%D0%B8%D0%BC%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F) прямой, проходящей через конечные значения, то получим метод трапеций.

Площадь трапеции на каждом отрезке: ~I_i \approx \frac{f(x_{i-1})+f(x_{i})}{2} (x_{i}-x_{i-1})

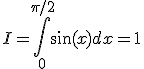
Погрешность аппроксимации на каждом отрезке: ~\left| R_{i} \right| \leqslant \frac{\left( b-a \right)^3}{12n^2} M_{2,i}\,, где M_{2,i}=\max_{x\mathcal{2}[x_{i-1},x_i]} \left| f''(x) \right| 

Полная формула трапеций в случае деления всего промежутка интегрирования на отрезки одинаковой длины *h:*

~I \approx h\left( \frac{f(x_{0})+f(x_{n})}{2} + \sum_{i=1}^{n-1}f(x_{i})\right),где h=\frac{b-a}{n}

Погрешность формулы трапеций: ~\left| R \right| \leqslant \frac{\left( b-a \right)^3}{12n^2} M_{2}\,,где M_{2}=\max_{x\mathcal{2}[a,b]} \left| f''(x) \right| 

*Пример:* Вычислим по формуле трапеций при n=2 интеграл



В данном случае

T_2=\frac{\pi}{4}(\frac{1}{2}\sin(0)+\sin(\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}))=0.948059

**Задания для самостоятельной работы**

П.Т.Апанасов «Сборник задач по математике», см. стр.240

**Литература:**

1. Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа: Учебник для  10 –11 кл. общеобраз. учреждений. М.: Просвещение, 2003. – 384с.: ил
2. Апанасов П.Т., Орлов "Сборник задач по математике" М: Высшая школа, 1987 г.

3.Яковлев Г.Н «Алгебра и начало анализа » ІІ ч. Москва 2001г

4. Н.Ш. Кремер А. « Высшая математика для экономистов» Москва.2010г

5. Бекбалиев Қ. « Алгебра и начало анализа» Алматы.2004г